Chers futurs étudiants de TSI1,

Dans les quelques pages qui suivent vous trouverez des rappels de cours qui seront utilisés dès la rentrée en Physique, et en Octobre en Sciences Industrielles pour l'Ingénieur. Lire ces rappels et chercher les exercices associés est une tâche qui correspond approximativement à 4 heures d'un travail sérieux. Ce travail est indispensable avant la rentrée, de même qu'avoir lu les livres au programme de Français Philosophie.

Nous vous conseillons de faire ces révisions la semaine avant la rentrée, il est inutile de s'y prendre trop à l'avance. Le premier paragraphe en particulier, intitulé "Points, vecteurs et coordonnées", sera le thème d'une évaluation rapidement après la rentrée. Les plus sérieux et les plus motivés gagneront beaucoup à re-faire un exercice du bac de STI2D sur les nombres complexes.

Si vous avez des questions sur les points abordés dans ce document, ne vous inquiétez pas, notez-les et l'enseignant de Mathématiques répondra à toutes vos interrogations dès la rentrée.

En vous souhaitant de bonnes vacances, dans l'attente de commencer la formation d'une nouvelle génération de TSI !

L'équipe pédagogique.

Géométrie dans le plan – Nombres complexes

1 Points, vecteurs et coordonnées

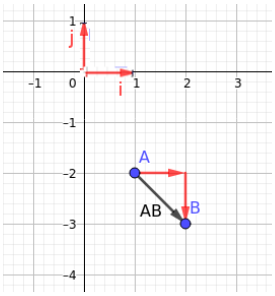
Définition 1

Soient $A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$ *deux points dans le plan. On a* $\boxed{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}}$.

Exemple 1

Soient $A(1;-2)$ *et* $B(2;-3)$ *alors* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2-(1) \\ -3-(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. *Dans la base orthonormée du plan usuelle* $(\vec{i}\,;\vec{j}\,)$, *on a alors*

$$\overrightarrow{AB} = 1.\vec{i} - 1.\vec{j}$$



Exercice 1

Soient les points $A(-1;1)$, $B(2;1)$ *et* $C(0;-1)$.

1. *Placer ces points dans le plan.*
2. *Déterminer les coordonnées de* $\overrightarrow{AB}$ *et de* $\overrightarrow{CA}$. *Vérifier la cohérence de vos calculs avec le dessin précédent.*
3. *Sur votre représentation graphique, vérifier* $\overrightarrow{AB} = 3.\vec{i} + 0.\vec{j}$.
4. *Déterminer* a *et* b *dans chaque cas :* $\begin{cases} \overrightarrow{AC} &= a\vec{i} + b\vec{j} \\ \overrightarrow{BC} &= a\vec{i} + b\vec{j} \\ \overrightarrow{BA} &= a\vec{i} + b\vec{j} \end{cases}$

Proposition 1

(Relation de Chasles) *Quels que soient les points* A, B, C *du plan, nous avons* $\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}}$.

Exemple 2

Soient $A(1;-2)$, $B(2;-3)$ *et* $C(1;2)$. *On a alors* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ *(A vérifier par vous même). La relation de Chasles se vérifie alors aussi avec les coordonnées des vecteurs :*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Cet exemple peut aussi s'écrire de la manière suivante. On a les relations :

$$\overrightarrow{AB} = 1.\vec{i} - 1.\vec{j}$$
$$\overrightarrow{AC} = 0.\vec{i} + 4.\vec{j}$$
$$\overrightarrow{CB} = 1.\vec{i} - 5.\vec{j}$$

et on écrit alors

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = (0.\vec{i} + 4.\vec{j}\,) + (1.\vec{i} - 5.\vec{j}\,) = 1.\vec{i} - 1.\vec{j} = \overrightarrow{AB}$$

Proposition 2

Soient $A(x_A; y_A)$ *et* $B(x_B; y_B)$ *deux points dans le plan. La distance entre* A *et* B *est la norme du vecteur* $\overrightarrow{AB}$, *notée* $||\overrightarrow{AB}||$.

On a $\boxed{||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}}$.

Exemple 3

Soient $A(1;-2)$ *et* $B(2;-3)$ *alors* $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *et* $||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

Exemple 4

Soit O *l'origine du plan, ses coordonnées sont* $O(0;0)$. *On note les points* $A(0;2)$ *et* $B(2;2)$. *Alors (à vérifier par vous même)*

$$||\overrightarrow{OA}|| = 2, \quad ||\overrightarrow{OB}|| = \sqrt{8}, \quad ||\overrightarrow{AB}|| = 2$$

On en déduit que

$$||\overrightarrow{OB}||^2 = ||\overrightarrow{OA}||^2 + ||\overrightarrow{AB}||^2$$

Cette relation justifie que le triangle OAB *est rectangle en* A *d'après le théorème de Pythagore.*

Exercice 2

Soit $A(1;2)$, $B(2;-1)$ *et* $C(1;1)$. *Le triangle* ABC *est-il rectangle ? Pourquoi ?*

2 Nombres complexes

Définition 2

Un nombre complexe s'écrit $z = a + ib$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *On a* $\boxed{i^2 = -1}$. *Le réel* a *est la partie réelle de* z, *on la note* $Re(z)$. *Le réel* b *est la partie imaginaire de* z, *on la note* $\text{Im}(z)$.

Exemple 5

Soient $z_A = 2 + 3i$ *et* $z_B = -1 - i$. *Alors* $Re(z_A) = 2$ *et* $Im(z_A) = 3$ *et* $Re(z_B) = -1$ *et* $Im(z_B) = -1$.

⚠ $Im(z_A) \neq 3i$ *et* $Im(z_B) \neq -i$ ⚠ *On ne "prend" pas le i !*

On peut calculer, par exemple,

$$z_A + 2z_B = 2 + 3i + 2(-1 - i) = 0 + i$$

$$z_A z_B = (2+3i)(-1-i) = -2 - 2i - 3i - 3i^2 = -2 - 5i - 3(-1) = -2 - 5i + 3 = 1 - 5i$$

Donc $Re(z_A + 2z_B) = 0$, $Im(z_A + 2z_B) = 1$ *et* $Re(z_A z_B) = 1$, $Im(z_A z_B) = -5$.

Définition 3

Le module de $z = a + ib$ *avec* $a, b \in \mathbb{R}$ *est* $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. *Un argument de* z *est un réel* θ *vérifiant*

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) & = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Exemple 6

Soit $z = 1 + i$. *Alors* $|z| = \sqrt{2}$. *Soit* θ *un argument de* z, *alors* $\begin{cases} \cos(\theta) & = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) & = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$. *Donc* $\theta = \frac{\pi}{4}$ *convient.*

Définition 4

Si $\cos(x) \neq 0$, *on pose* $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

⚠Ce sera un réflexe en TSI : on vérifie TOUJOURS que le dénominateur ne s'annule pas avant de faire calculer un quotient.

Exemple 7

1. $\tan(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0)} = \frac{0}{1} = 0$
2. $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1$.
3. *On ne peut pas calculer* $\tan(x)$ *pour* $x = \frac{\pi}{2}$ *car* $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$, *on diviserait par* 0 *:* $\frac{\pi}{2}$ *est une valeur interdite de* tan.

Proposition 3

Soit $z = a + ib$ *un complexe avec* $a, b \in \mathbb{R}$. *On suppose que* $a \neq 0$. *On note* θ *un argument de* z. *Alors* $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.

Exemple 8

Soit $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. *On a*

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{1} = 1$$

On note θ *un argument de* z*, on a alors*

$$\begin{cases} \cos(\theta) & = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2} \\ \sin(\theta) & = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \quad \textit{donc } \theta = \frac{\pi}{3} \textit{ convient.}$$

On a bien $\tan(\theta) = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \tan(\frac{\pi}{3})$ *(voir le tableau ci-dessous).*

réel x	$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\tan(x)$
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	non défini

Exercice 3

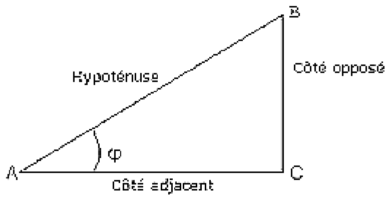
Donner le module et un argument de chacun des complexes suivants : $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = 1 + \sqrt{3}i$ *et* $z_3 = 2 + \sqrt{12}i$.

3 Application

Définition 5

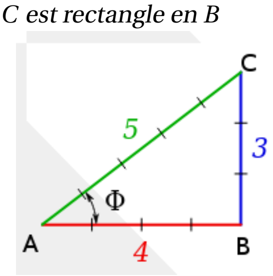
Soit ABC *un triangle rectangle en* C *comme sur le dessin. On a alors*

$$\cos(\varphi) = \frac{AC}{AB}, \quad \sin(\varphi) = \frac{BC}{AB}, \quad \tan(\varphi) = \frac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \frac{\frac{BC}{AB}}{\frac{AC}{AB}} = \frac{BC}{AC}$$



Exemple 9

Le triangle ABC *est rectangle en* B



En effet, d'après le théorème de Pythagore

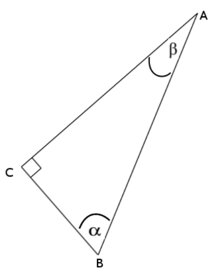
$$AC^2 = 5^2 = 25 = 16 + 9 = 4^2 + 3^2 = AB^2 + BC^2$$

On peut alors calculer

$$\cos(\Phi) = \frac{4}{5}, \quad \sin(\Phi) = \frac{3}{5}, \quad \tan(\Phi) = \frac{3}{4}$$

Exemple 10

On considère le triangle rectangle ABC*, rectangle en* C

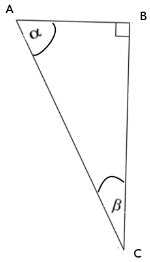


$$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AB}, \quad \sin(\alpha) = \frac{AC}{AB}, \quad \tan(\alpha) = \frac{AC}{BC}$$

$$\cos(\beta) = \frac{AC}{AB}, \quad \sin(\beta) = \frac{BC}{AB}, \quad \tan(\beta) = \frac{BC}{AC}$$

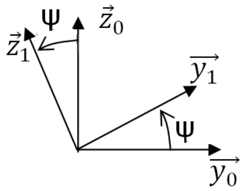
Exercice 4

Déterminer en fonction des longueurs AB, AC et BC les valeurs de $\cos(\alpha), \cos(\beta), \sin(\alpha), \sin(\beta), \tan(\alpha), \tan(\beta)$.



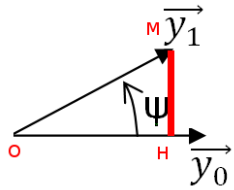
Exemple 11

On considère la situation où on fait tourner un repère orthonormé $(\overrightarrow{y}_0; \overrightarrow{z}_0)$ *d'un angle* Ψ.
(Rappel : un repère du plan est orthonormé si ses vecteurs forment un angle droit et vérifient $||\overrightarrow{y}_0|| = ||\overrightarrow{z}_0|| = 1$*).*



On a alors : $(*)\quad \overrightarrow{y}_1 = \cos(\Psi)\overrightarrow{y}_0 + \sin(\Psi)\overrightarrow{z}_0$.

En effet, si on se place dans le triangle OHM rectangle en H



Cela signifie qu'en projetant $\overrightarrow{y}_1$ *sur* $\overrightarrow{y}_0$ *(ce qui est dessiné en rouge), on obtient un vecteur de norme OH. Or, on calcule*

$$\cos(\Psi) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH, \text{ car } \quad OM = ||\overrightarrow{y}_1|| = 1$$

Donc, en projetant $\overrightarrow{y}_1$ *sur* $\overrightarrow{y}_0$ *on obtient le vecteur :* $OH\overrightarrow{y}_0 = \cos(\Psi)\overrightarrow{y}_0$*. Ce qui explique le début de l'écriture de l'équation* $(*)$.
Si on recommence le même processus en considérant $\sin(\Psi)$ *et en projetant non plus sur* $\overrightarrow{y}_0$ *mais sur* $\overrightarrow{z}_0$ *on obtient la deuxième partie de l'écriture* $(*)$.

Exercice 5

En suivant la même méthode que dans l'exemple précédent, exprimer $\overrightarrow{z}_1$ *en fonction de* $\overrightarrow{y}_0$ *et* $\overrightarrow{z}_0$*. C'est-à-dire, déterminer a et b réels tels que :*

$$\overrightarrow{z}_1 = a\overrightarrow{y}_0 + b\overrightarrow{z}_0$$